統計力学とカオス(特別講演,大討論会「エボリューションとカオス」,カオスとその周辺,研究会報告)

斎藤, 信彦

⑧解釈学的ダイナミクスが脳内に存在する。

⑨脳は内部イメージを生成している。

⑩脳は操作的な情報(プログラム)を自律生成する。

⑪解釈の定義を与えた。

⑫ニューロンネットワークでこの可塑的なプロセスの実現をめざしている。

⑬脳波とカオスの関係を明らかにせよ。

⑭方法論の吟味が必要である。

⑮物語を語る方法(解釈学的アプローチ)を重視したい。

3. ①個別性, 多様性の表現はあるか?

②歴史性の表現はあるか?

③記述不安定性の表現はあるか?

4. ①厳格なアルゴリズムなしで並列計算を行なうことができる。種々のoptimization problemへ応用可能である。

②高速道路のナンバープレートのよみとり

③交通標識の自動認識

④適応制御的なものではなく発展制御的なものを求める必要がある。

⑤人間とコンピューターのinterface

5. 個々の脳の同型性からくる価値の共有にもとづく世界観の拡大をもとめて研究している。

統計力学とカオス

早大・理工　斎藤信彦

§1. 孤立感受率

evolutionとカオスというテーマでは, 当然カオスの歴史を話さなければならないのでしょう。しかしそれにはPoincaré以来の非線形数学に精通していないと無理ですから, 私はとてもその任に堪えられません。したがって私個人の中のevolutionということになりますのをお許し下さい。

1960年頃，私はOregon大学におりました。京大の山本常信さんもおられて共にHill研究室のliberalな雰囲気を楽しんでいました。そこで山本さんのなさった仕事の中に孤立感受率χ_{iso}というのがありました。ある力学量Bの平均は

$$< B > = \sum_{n} B_n \exp \beta \left[F - E_n \right] \tag{1}$$

で与えられます。ここでB_nはハミルトニアンを対角化する表示でのBの対角要素です。感受率は，aを磁場などの，あるパラメーターとしたとき$\partial < B > / \partial a$で定義されますが，この微分を等温的に行うときは等温感受率χ_T，エントロピー一定の下で行うときは断熱感受率χ_Sです。χ_{iso}は

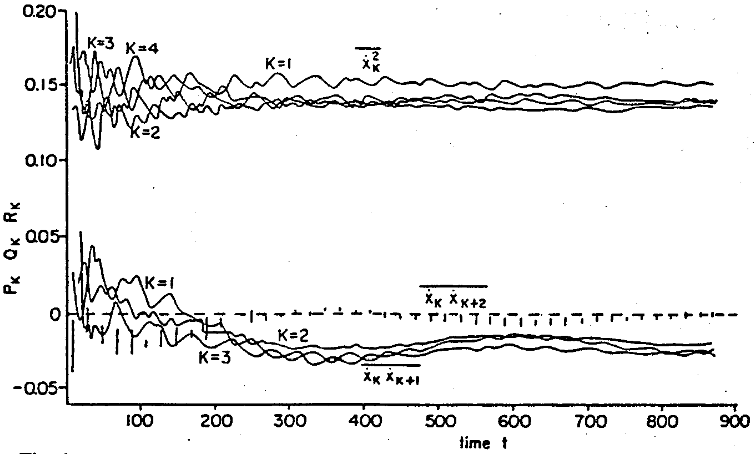
$$\chi_{\mathrm{iso}} = \sum \frac{\partial B_n}{\partial a} \exp \beta \left[F - E_n \right] \tag{2}$$

で与えられます。このとき$<B>$の微分をエネルギー分布を変えずに行っているので，エントロピー一定より厳しい制限がありますからχ_Sとは違うわけですが，Broerはχ_Sとχ_{iso}は古典系では等しいが，量子系では異なると主張しました。山本さんはapproximate hamiltonianという考えをつかって，量子系でも$\chi_S = \chi_{\mathrm{iso}}$であることを示しました。私はその議論に些か不満でしたが，Broerの推論の誤りに気がついて$\chi_{\mathrm{iso}} = \chi_S$は熱力学的極限で等しいと論じました。その後一般には$\chi_{\mathrm{iso}} < \chi_S < \chi_T$という不等式が成立するのだとされて来ました。$\chi_{\mathrm{iso}}$は線形応答理論から求められるものと同じですが，その理論の立て方からみると，断熱過程ですから，何故χ_Sにならないか私には疑問として残りました。実はこれがカオス研究へのいとぐちでした。

§ 2. 非線形格子振動

その頃，戸田・寺本・堀・松田さん達が格子振動の研究グループをつくって大活躍をしていました。私は線形の格子振動でも不可逆性や粘性類似の性質が出て来るRubinの仕事に興味をもちましたが非線形性を入れなければ本質的でないと思っていました。そこでこのグループに入れて頂いて線形系の不可逆性や熱平衡への接近を，非線形系のそれらと比べてみようと思いました。格子振動子系はモデルとして大へん優れていますし，先のχ_{iso}の問題が頭にありましたので，外力として一定の力を加えたときの挙動を，線形系と非線形系を比較しようとしました。線形系では解析的な計算が出来ます。それによりますと，個々の粒子の運動エネルギーの長時間平均はどの粒子でも同じ値になり，等分配の法則が成り立ちますが，隣り合った粒子の速度の相関は消えません。このことは完全な熱平衡になっていないことを示します。そこで

非線形性を入れればその相関が消えるのではないかと考えました。非線形性を入れた計算は解析的には難かしいので，その頃から使われ出した計算機を利用するのがよいと思いました。そして当時学生であった広岡さんが具体的な計算をしました。ところがその結果は予想に反して相変らず相関は消えず線形系とあまりちがわないのです（図1）。計算機実験をしたのははじ



The time average of $\dot{x}_k^2$, $\dot{x}_k\dot{x}_{k+1}$ and $\dot{x}_k\dot{x}_{k+2}$ for the anharmonic lattice, $N=4$, $m=4$, $K=1$, $\lambda=1$, $G=0.25$.

図1. 運動エネルギーと，速度の相関
両端固定，動きうる粒子の数 4，　k は粒子の番号，（$k = 1, \cdots,\ 4$）

めてですから，まだ計算時間が足りないのかも知れないなどと思ってあまり自信がありませんでしたからそのままにしていました。その頃，1950 年のはじめ頃に Fermi らが Los Alamos の研究所で行なった計算機実験のことを知りました。当時の教育大に Fermiの全集があるということで戸田先生のところで見せてもらいました。いわゆるＦＰＵの実験です。我々の実験結果もそれと類似のものだとわかりました。

Fermiは当時完成した高速電子計算機の将来の物理に対する役割を想い，一つの応用として彼が若いときから関心のあったエルゴードの問題を取り上げて，Pasta, Ulam と共に非線形格子振動の計算をしたのです。そして一番低い振動モードにエネルギーを与えて，そのエネルギーが高いモードにどのように移るかをみました。どのモードにも平均にエネルギーが行き亘ると考えたのです。ところがエネルギーが伝わるのは低いモードだけで，しかもある時間経つと元に戻り，周期的でさえあるのです。ＦＰＵの論文には，The results were, from the beginning, surprising to us. とあります。この研究からソリトンが生れ，戸田格子が発見されるのは御承知の通りです。しかしこの方向は Fermi や，おくればせながら私共の，問題意識とは異ります。どうにかしてソリトンを壊し，熱平衡の実現をさせたいと思いました。そして遂にＦＰＵの問題では，広岡，大山らの実験で誘導現象が見出され，誘導期間をすぎた後には系の運動は乱離になって熱平衡に近づくということがいえるようになりました（図２）。この

ときも，しかし，学会発表のとき，計算機のアーティファクトではないかという批判が出ました。それに答えるために誘導現象が終ったところで，すべての粒子の速度を逆にし，計算を続行してみましたら，見事に逆転して，Newtonの可逆的力学に従がっていることを示すことが出来ました（図3）。その後Pastaらの研究がヒントになってMatheu関数をつかって，この現象を理論的にも解明することが出来るようになりました。

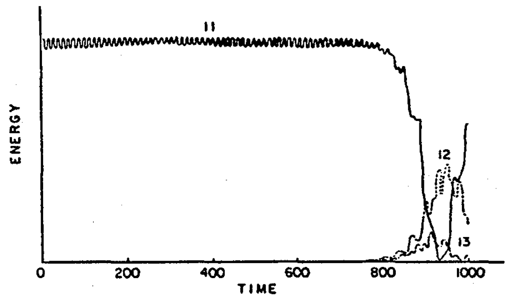
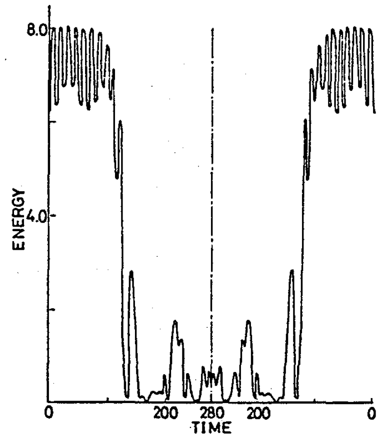


図2. 誘導現象



Reversibility of the induction phenomenon.

図3. 誘導現象の逆転

そういうことをしている間に，Astron. J.にのった，今では有名なHénon, Heilesの論文を知りました。二自由度の非可積分系の挙動をPoincaré断面でみると，エネルギーが高くなると，極めて乱雑な挙動をするのです。これは全く衝撃的でした。その乱雑さと，しかもたった二自由度というのもおどろきでした。そしてわれわれも二自由度系の研究に入って行くことになります。最近は量子系のこともしらべていますが，これらの研究は省略することに致しましょう。

§3. カオス研究の拡がり

カオスは上に述べたハミルトン系ばかりでなく，いろいろなところで独立に発見されました。J. Atmosph. Sci. に出たLorenzの，後にstrange attractorとよばれたアトラクター上の挙動や数理生態学から生れたMayの一自由度の離散力学が現われ，1975年Li-YorkeがPeriod three implies chaos（Amer. Math. Monthly, 82 (1975) 985）を書いて以来カオスという言葉が一般的に用いられ定着しました。そのほかRuelle-Turkensの乱流理論（Comm. Math. Phys. 20 (1971) 167）や化学乱流なども論ぜられました。これらは一般に散逸系です。日本でもこれらの研究が刺戟になって，散逸系のカオスの研究が盛んになってカオスとその周辺という研究会がもたれるようになりました。

こうしてカオスを表わす現象がいろいろなところで見出されましたが，無生物系では受動的であるのに対し，生物系では能動的にカオスをつくり出していると思われる現象もあります。脳の機能の中には，ゆらぎを積極的につくり出し，それを利用して思考や創造活動をしている

と思われるふしがあります。またゾウリムシなどの原生動物は，餌を探すために積極的にゆらぎをつくっています。積極的にゆらぎをつくるなら，少数自由度の何かの力学系（多分ある種の化学反応）のカオスを利用している可能性があります。昨日の永井さん達の研究はこの種のカオスの探索の研究です。

§4. カオス研究の意義

カオスの研究は決定論と確率論とをつなぐ橋渡しの役を果しています。自然科学の歴史は，隣接した違った分野を統一して来たことを示しています。地上の力学（ガリレー）と天体の力学（ケプラー）を統一したのはニュートンの力学です。光学と電磁気学は Maxwell の理論で，力学と熱力学は統計力学で，物理と化学は量子力学で統一されました。生物学と物理化学をつないだものは勿論DNAの発見です。こうして残ったものが決定論と確率論でした。ここにカオスが登場するのですが，ここでは観測という問題を通して人間の有限性が入って来ます。自然科学の進歩は，人間の主観を排除して客観性を求めるところに依存して来ましたが，ここに至って人間を忘れることが出来なくなりました。いわば人間の回復です。そのいう意味で新しい認識論のはじまりということもで来るのではないかとおもいます。これに対しては富田和久さんの論述は示唆にとんでいます（カオスの意義：日本物理学会誌 40（1985）99）

力学系がカオスになって十分に発達すると熱力学系になります。力学系では例えばニュートンの方程式や量子力学の方程式が成り立ちますが，カオスの熱力学系では別の法則が成立します。熱力学の状態方程式や，ナビエ・ストークスの方程式です。ナビエ・ストークスの方程式は，再び決定論的な式ですが，このカオス状態が外でもなく乱流です。ここで実は翌日にあった森さんの話を借用して議論をつづけさせて頂きますと，この乱流が十分発達した後を記述する方程式は再びナビエ・ストークス型のものであるでしょう。しかしそこに入って来る粘性は渦の相互作用による渦粘性です。冬，シベリア地方から吹く風（これは乱流状態です）によって斉洲島の下流に出来るカルマン渦はこの超ナビエ・ストークス方程式による超カルマン渦である筈です。（渦粘性を渦の相互作用から ── 分子間の相互作用から流体の粘性を出そうとする非平衡統計力学と類似して ── 導くことは面白い問題です）。乱流では偶々超ナビエ・ストークスの方程式は，粘性係数の意味がちがうだけで普通のナビエ・ストークスの式と同じ型のものが期待されますが，カオス状態を示す現象論的力学系はもとの力学系と一般にはちがうことが大切です。

再び感受率にもどりましょう。力学の立場では時間に依存する観測量$\overline{B}(t)$は

$$\overline{B}(t)=\int \mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\, B(p,q)\, f(p,q,t,a) \tag{3}$$

です。fは分布固数で，力学変数をp，qで代表させています。熱力学系はカオスですから，カオスの立場では$f(p, q, t)$はtについても，p，qについても極めてはげしく乱雑に変化する量です。$t \to \infty$のとき$\lim f(p, q, t)$は存在しないのがふつうです。しかし一般に$B(p, q)$はp，qのなめらかな関数ですから，(3)の積分ではfのp，qに対するはげしい変化は消されて$\overline{B}(t)$は存在するでしょう。このとき(3)のfの代わりに滑らかな関数$g(p, q, t, a)$で置き換えることが出来ます。この具体的な例はパイこね変換で示すことが出来ます。こういうgが存在するとき$f(p, q, t)$は$g(p, q, t)$に法則収束するといいます。fはパラメーターaのやはりはげしく変化する関数ですが，gはaのなめらかな関数であると期待出来ます。いいかえるとfはaで展開出来ないが，gでは展開出来るでしょう。fは例えばLiouvilleの方程式に従いますが，gの従う方程式はそれとは全く異り，例えばFokker-Planck型のものでありましょう。線形応答理論ではfをaで展開出来ると仮定しているが，それには疑問があると私は思いました。このことをいつか森さんに話しましたら，van Kampenもそういうことを考えていると教えて下さいました(N. G. van Kampen, Physica Norvegica **5** (1971) 279).

fはaで展開出来ないといういくつかの状況証拠はありますが，まだ決定的なことはいえません。しかしはじめにのべたように，線形応答理論ではχ_sの代りにχ_{iso}が出て来るのは，このためではないかと考えています。御教示をえられれば幸です。

量子力学と確率過程

並　木　美喜雄

「カオス」の研究会で私が話したい，または話すことのできるテーマは

- 量子力学と確率過程
- 波動関数と観測過程

です。二つとも話して議論していただきたいのですが，時間的制約もあることだし，さんざん迷った末，前者をえらびました。私としては，「量子力学と確率過程」という話題を「カオス」とくに「量子カオス」の立場で見直したいという将来目標があります。ただ，「カオス」についてそれほど勉強したわけではないので，この研究会の興味に合致できるかどうかわかりません。この点御容赦願います。なお，後者の話題もこの研究会との関連で，捨てがたい未練がありますが，すでに何回か話したり書いたりしたので，それら[1)]を見て下さるよう，お願いします。